

Vectoranalyse

Hertentamen 25-01-2007

Zet op elk vel je naam en student nummer. De nummers tussen de haakjes geven het aantal punten aan voor die opgave.

$$\text{Cijfer} = 1 + \frac{\#}{4}$$

I) (9) Laat $D = \{(x, y) | \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), x \in [a, b]\}$ waarbij $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en

- $\phi_1(x) < \phi_2(x)$ voor alle $x \in (a, b)$,
- $\phi_1(a) = \phi_2(a)$,
- $\phi_1(b) = \phi_2(b)$.

Bewijs

$$\int_{\partial D} P dx = - \int \int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

II) Laat $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2,$$

$$g(x, y) = x^2 - y^2 - 1.$$

- (5) Bepaal alle kandidaten voor extremen van f onder de conditie $g = 0$.
- (5) Gebruik de Hessianen van f en g om het type van deze kandidaten te bepalen.

III) (7) Laat $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2.$$

Bereken het volume van

$$W = \{(x, y, z) | x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq f(x, z), x^2 + z^2 \leq 1\}.$$

IV) Gegeven is het vectorveld $F(x, y, z) = (2xyz + \sin x, x^2z, x^2y)$

- (3) Bepaal $\text{curl}(F)$.
- (4) Bestaat er een functie f zodanig dat F de gradient is van f ? Verklaar.
- (3) Laat $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ met

$$c(t) = (\sin(\pi t), t^2, e^t - t(e - 2) - 1).$$

Bepaal

$$\int_c F \cdot ds.$$